13

Per la via piú breve...

13.1 Una tabella delle distanze stradali fra le principali città italiane ci fornisce i dati qui riportati:

La nozione di distanza

distanza fra:

Milano e Roma: 626 km
Roma e Napoli: 232 km
Milano e Napoli: 858 km
Milano e Torino: 139 km
Torino e Roma: 700 km

Questi dati ci suggeriscono alcune osservazioni molto interessanti: notiamo, ad esempio, che la distanza fra Milano e Napoli è esattamente la somma delle distanze fra Milano e Roma e fra Roma e Napoli: $626 + 232 = 858$. Basta un'occhiata alla carta geografica per spiegare questa coincidenza: la strada piú breve fra Milano e Napoli passa per Roma.

Per abbreviare la scrittura, indichiamo le città della nostra tabella con la lettera iniziale e scriviamo d per distanza: ad esempio, $d(T, M)$ indica la distanza fra Torino e Milano. Continuando le nostre osservazioni scopriamo che si ha:

$$d(T, R) < d(T, M) + d(M, R)$$

Infatti, è:

$$700 < 139 + 626 = 765$$

Anche questo risultato è ben comprensibile: per andare da Torino a Roma si può passare per Milano e, in questo caso, la lunghezza del percorso sarà uguale alla somma dei due tratti, cioè 765 km, ma si ha a disposizione anche una via piú breve, che fa risparmiare 65 km. In nessun caso la distanza fra una città A ed una città C può superare la somma delle distanze di A da una certa città B e di B da C: se la superasse, la distanza fra A e C non sarebbe piú la lunghezza del cammino piú breve, come noi vogliamo che sia. Dunque, sempre indicando con d la distanza, riteniamo che debba valere in ogni caso la disuguaglianza:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) \tag{1}$$

La nozione di distanza come lunghezza del cammino piú breve si applica a tante situazioni diverse.

Ad esempio, supponiamo di considerare una città, con la rete stradale indicata nella pianta. Le strade si intersecano ad intervalli di 100 m. La distanza fra il punto A e il punto C (fig. 1) è di 700 m. In questo caso ci sono molti cammini fra A e C che hanno la lunghezza minima (cioè 700 m). Anche per la nostra rete stradale, indicando con $d(A, C)$ la lunghezza del cammino piú breve fra due punti A, C qualunque, vale necessariamente la disuguaglianza (1).

Consideriamo ancora un esempio: in una pianura c'è un lago di forma circolare, che si può costeggiare ma non attraversare. Quale è il cammino piú breve che congiunge due punti A, C? È chiaro che, se il tratto rettilineo fra A e C non incontra il lago, esso sarà il cammino piú breve, altrimenti il cammino piú breve comprenderà un certo tratto che costeggia il lago, come in figura. Non sarebbe facile calcolare la lunghezza del cammino piú breve: comunque, è certo che, definendo la distanza fra due punti come la piú breve

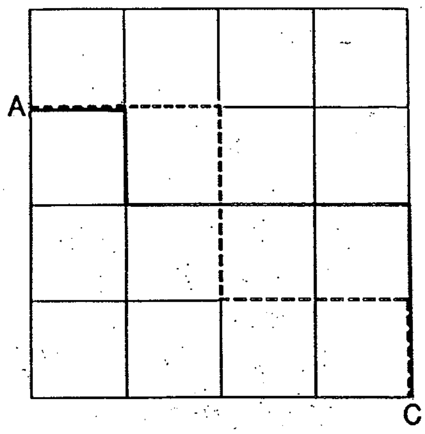


Fig. 1

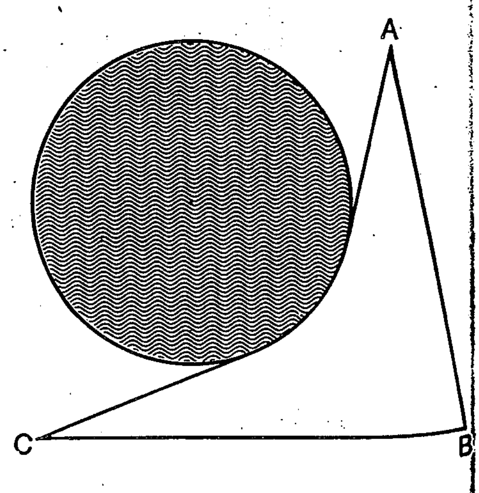


Fig. 2

fra le lunghezze dei percorsi che li congiungono, deve valere la disuguaglianza (1).

Come ulteriore esempio, prendiamo un mappamondo e consideriamo la rotta di un «jet» fra Roma e New York: per vederla con precisione, prendiamo uno spago e tendiamolo fra i due punti. Scopriremo (forse con una certa sorpresa) che la rotta non rimane vicina al parallelo (anche se la latitudine di Roma non differisce molto da quella di New York), ma si porta molto piú a Nord.

Il minimo cammino su una sfera è un arco di cerchio massimo (come si sa, si dice cerchio massimo di una sfera il cerchio che si ottiene come intersezione della sfera con un piano passante per il centro). Adottando come distanza fra due punti della Terra la lunghezza del minimo cammino «jet» che li congiunge, troviamo che vale ancora necessariamente la (1).

La nozione di distanza, di cui abbiamo dato qualche esemplificazione, ha una portata molto generale. In certi casi, ad esempio, si può intendere per distanza il minimo tempo che si può impiegare (con un certo mezzo) per andare da un punto all'altro. Di questo tipo è la distanza dei montanari, che si esprime in ore di cammino (l'asperità del terreno renderebbe poco significativa la misura in chilometri). È curioso il fatto che anche gli astronomi esprimano le loro distanze con un tempo (gli «anni-luce»).

Esercizi

1 Nell'esempio della figura 1, contare il numero dei cammini di lunghezza minima fra il punto A e il punto C. (Procedere man mano contando i cammini che da A arrivano a tutti i punti intermedi: la tecnica è simile a quella usata nel § 6.1 e nel § 7.3 per contare i cammini; si troverà che, nel caso della figura 1, i cammini sono 35).

2 Nell'esempio della figura 2 è sempre unico il cammino di minima lunghezza fra due punti?

3 Quale è il cammino piú breve che, sulla superficie di un cubo, congiunge due vertici opposti? È unico? Descriverlo e calcolarne la lunghezza.

* **4** (Variante dell'esercizio precedente). Trovare il cammino piú breve che congiunge due vertici opposti sulla superficie di un prisma retto con base quadrata di lato 1 e con altezza k.

5 Come verifica del risultato trovato risolvendo l'esercizio 3, dimostrare per via algebrica che è $\sqrt{5} < 1 + \sqrt{2}$.

** **6** Due città A, B distano fra loro 300 km. Una terza città C dista 160 km da A e 180 da B. Dimostrare che occorre fare almeno 20 km per raggiungere da C un punto della strada che collega A con B. (Qui le distanze sono tutte prese sulla rete stradale).

7 Due punti A e B distano 12 cm. Un punto P ha distanza dal punto A tripla della distanza dal punto B. Fra quali limiti può variare la distanza di P da B? (Indicare con x questa distanza).

8 Se vale la (1), la differenza fra le distanze che due punti A e C hanno da un terzo punto non può superare la distanza che c'è fra A e C.
(Questa proprietà — che è una semplice conseguenza della (1) — ha un forte significato intuitivo: ripensare alla distanza fra le città...).

13.2 Assiomi e teoremi. Gli assiomi della distanza. Il cerchio

13.2 La geometria, di cui ora cominciamo ad occuparci, è la scienza dello spazio: essa è, in un certo senso, la piú elementare delle scienze fisiche perché cerca di cogliere le proprietà piú semplici e piú profonde dell'ambiente che ci circonda. Durante la scuola media abbiamo già studiato la geometria dal punto di vista intuitivo: lo studio consisteva nel mettere in evidenza tante proprietà, certamente interessanti, ma non molto legate fra loro. Ora vogliamo procedere con un metodo che, dal punto di vista scientifico, è molto piú incisivo: *ammesse alcune proprietà fondamentali, vogliamo dedurre da esse, mediante il ragionamento, tutte le altre proprietà che ci interessano.*

Quando si fa un ragionamento, si stabilisce la verità di un'affermazione sulla base di altre affermazioni che si suppongono vere: non si può dunque fare a meno di ammettere alcune affermazioni non dimostrate, su cui tutte le altre si appoggiano cosí come un edificio si appoggia sulle fondazioni. Queste affermazioni primitive da cui tutte le altre si possono dedurre si dicono

assiomi (o anche **postulati**). Gli assiomi possono essere scelti con una certa libertà, ma devono avere una grande evidenza intuitiva, almeno se vogliamo che la geometria offra una descrizione fedele dello spazio che ci circonda. Le affermazioni che si dimostrano si dicono **teoremi**.

Durante questo corso di matematica, abbiamo già fatto in varie occasioni delle piccole dimostrazioni. Anzi, le proprietà 1)-9) dell'addizione e della moltiplicazione che abbiamo introdotto nell'8° capitolo possono essere considerate come assiomi da cui si può dedurre tutto il calcolo delle espressioni (come abbiamo fatto nel 9° capitolo).

Nell'ambito della geometria, però, occorre svolgere le dimostrazioni in modo piú sistematico: a poco a poco, dovremo imparare a condurre una dimostrazione senza perderci...

Il paragrafo precedente ha già rivelato abbastanza bene le nostre intenzioni: il nostro punto di partenza per lo studio di uno spazio S è l'introduzione di una **distanza**. Il modo preciso di fare ciò è fornito dal seguente assioma:

A1 (Assioma) *Per tutte le coppie di punti P, Q dell'insieme S è assegnato un numero reale $\geqslant 0$, che si dice* **distanza** *di P da Q e si indica con $d(P, Q)$. La distanza ha le seguenti proprietà:*

I) *Se i punti P, Q sono distinti è $d(P, Q) > 0$, se coincidono è $d(P, Q) = 0$.*

II) $d(P, Q) = d(Q, P)$ (*proprietà di* **simmetria**).

III) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ (**disuguaglianza triangolare**).

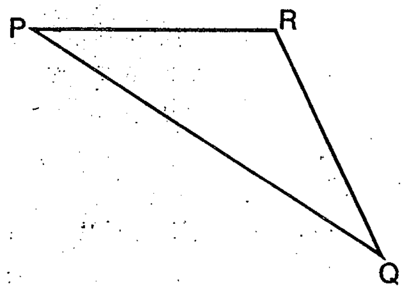


Fig. 3

La disuguaglianza triangolare è stata già trovata nel corso di geometria intuitiva a proposito della possibilità di costruire un triangolo di lati assegnati (di qui, appunto, il nome); nel § precedente formula (1) abbiamo visto che essa si presenta in modo naturale tutte le volte che la distanza fra due punti ha il significato di « lunghezza minima dei cammini che li congiungono ».

La proprietà I) ci dice che due punti hanno distanza nulla quando coincidono, e solo in quel caso.

Anche la proprietà II) è molto naturale: ad esempio, le tabelle che riportano le distanze stradali fra le città, di solito contengono una sola coppia di nomi: infatti, una volta scritta la distanza fra Milano e Roma, è inutile riportare quella fra Roma e Milano... Per capire meglio questa proprietà, possiamo considerare delle situazioni concrete in cui essa non sarebbe vera: ad esempio, la « distanza del montanaro » non è simmetrica (e quindi non è una distanza in senso proprio); infatti se per salire su una cima occorrono 5 ore, per la discesa ne possono bastare 3...

Notiamo che *la distanza è definita per tutte le coppie* (P, Q) *di* S, *e quindi si può considerare come una funzione definita nel prodotto cartesiano* $S \times S$, *a valori reali (cioè avente come codominio l'insieme dei numeri reali)*. Un insieme S in cui sia assegnata una distanza (e cioè valga l'assioma A1) si dice uno **spazio**. (Abbiamo già usato questa parola, ed abbiamo già usato la parola **punto** per indicare un suo elemento).

Naturalmente, come abbiamo visto nel § 13.1, si possono considerare tanti spazi (lo spazio di un vigile urbano sarà la rete stradale della città, lo spazio di un pilota di « jet » sarà la superficie sferica della Terra, ecc.). Il nostro scopo principale in queste lezioni di geometria è quello di studiare quel particolare spazio, molto ricco di proprietà, che è il **piano**. Del piano abbiamo un'idea intuitiva che ci è suggerita da tanti modelli concreti (ad esempio: la superficie di un tavolo o il pavimento di una stanza, prolungati indefinitamente). Non diremo direttamente che cosa è il piano, ma fisseremo alcune sue proprietà fondamentali attraverso gli assiomi. Quando avremo terminato l'esposizione dei nostri assiomi, la nostra idea intuitiva di piano risulterà tradotta in termini precisi.

D'ora in poi, per indicare la distanza fra due punti A, B del piano, useremo la notazione piú breve: $\overline{AB}$ anziché $d(A, B)$.

Intanto, sulla base della sola distanza, siamo in grado di introdurre alcuni importanti sottoinsiemi del piano.

Definizione. Dato un punto O ed un numero positivo r, si dice **cerchio** di centro O e raggio r l'insieme dei punti P del piano tali che $d(O, P) = r$.

Si dice **disco** di centro O e raggio r l'insieme dei punti P del piano tali che $d(O, P) \leq r$.

Notiamo però che, nella nomenclatura corrente, si chiama spesso cerchio quello che noi abbiamo chiamato disco e si chiama circonferenza quello che noi abbiamo chiamato cerchio.

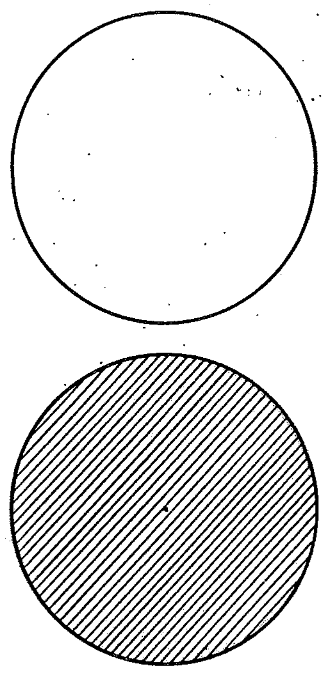


Fig. 4

Gli assiomi della retta. Le coordinate sulla retta

13.3 Passiamo ora alla descrizione — mediante assiomi — di quei particolari sottoinsiemi del piano che sono le **rette**. Dobbiamo avere sempre presente l'idea intuitiva della retta come linea di minor percorso: da questo punto di vista, un filo teso è il modello piú efficace della retta.

A2 (Assioma) *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*

(Volendo dire le cose in modo piú preciso, anche se un po' pedante: dati due punti qualsiasi, P e Q, con $P \neq Q$, esiste una ed una sola retta a cui appartengono sia P che Q).

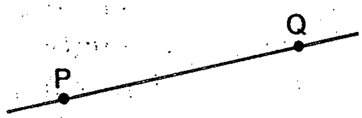


Fig. 5

Facciamo ora alcune convenzioni riguardo ai simboli: *indicheremo i punti del piano con le lettere maiuscole, a carattere stampatello: P, Q, A, B, O ... Indicheremo le rette del piano con le lettere maiuscole a carattere corsivo: $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...; diremo «retta P Q» per designare la retta individuata dai punti P, Q.*

Diamo ora un'importante definizione:

Due rette si dicono **incidenti** se hanno esattamente un punto in comune; altrimenti si dicono **parallele**.

Riflettiamo: due rette sono parallele se non hanno alcun punto in comune o se ne hanno piú di uno. Ma se hanno due o piú punti in comune, esse coincidono, per l'assioma A2. Dunque, per noi, *una retta deve essere considerata parallela a se stessa.* (Questa convenzione è utile, come vedremo in seguito).

Il seguente assioma ci dice che nessuna retta può esaurire tutto il piano.

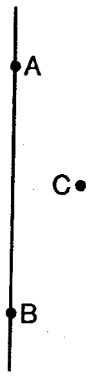


Fig. 6

A3 (Assioma) *Nel piano ci sono almeno tre punti non allineati.*

« Allineati » significa ovviamente che stanno sulla stessa retta. L'affermazione che tre punti A, B, C non sono allineati significa che se una retta ne contiene due, non contiene il terzo.

La nostra idea intuitiva di retta ci suggerisce che essa può essere percorsa in due **sensi** (o **versi**) senza ritornare mai ad un punto per cui si è già passati. Fissato un senso di percorrenza, se si incontra prima il punto P e poi il punto Q, si scrive $P < Q$ (e si legge « P precede Q », oppure « Q segue P »). È naturale ammettere che questa sia una relazione di ordine (§ 10.2, proprietà *a*, *b*, *c*): anzi, è stata proprio l'idea intuitiva dell'ordinamento dei punti di una retta che ci ha portato a rappresentare i numeri razionali relativi (e poi, successivamente, i numeri reali) su una retta. Naturalmente, se si inverte il senso di percorrenza della retta, ogni relazione di ordine viene sostituita da quella opposta: invece di $P < Q$ si avrà $Q < P$.

L'assioma seguente afferma l'esistenza di queste relazioni di ordine ed enuncia un'importante proprietà che collega l'ordinamento con la distanza:

A4 (Assioma) *Su ogni retta esistono due* **relazioni di ordine, fra loro opposte,** *con questa proprietà*

Se è $A < B < C$

allora è

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \qquad (2)$$

Viceversa se, dati tre punti A, B, C *vale l'uguaglianza* (2), *allora il punto* B *è allineato con* A *e* C *e si ha* $A < B < C$, *oppure* $C < B < A$.

Una retta su cui sia stata fissata una relazione di ordine si dice retta **orientata**.

Fissata su una retta $\mathfrak{R}$ una relazione di ordine ed un punto O, *l'insieme dei punti* P *tali che* $P > O$ *si dice* **semiretta** *di origine* O.

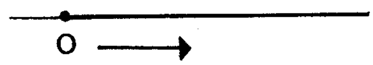


Fig. 7

Naturalmente, anche l'insieme dei punti P per cui è $P < O$ è una semiretta (quella che si ottiene considerando la relazione di ordine *opposta*, e verrà detta **semiretta opposta** alla prima).

Diciamo che il punto B della retta $\mathfrak{R}$ sta fra A e C se si ha

$$A < B < C \quad \text{oppure} \quad C < B < A$$

L'insieme costituito dai punti A e C e da quelli che stanno fra loro si dice **segmento** di estremi A e C, e si indica con $[A, C]$. L'assioma A4 ci dice (anche se in modo un po'... diplomatico) che il segmento $[A, C]$ è il percorso di minima lunghezza fra A e C. Infatti, dati A e C, per un punto B qualunque vale la disuguaglianza triangolare

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$$

Il fatto che in questa relazione valga il segno di uguaglianza, come esprime la (2), ci dice — intuitivamente — che, *volendo andare da A a C non allunghiamo il cammino se passiamo per B* (ripensare ancora all'esempio della strada Milano-Roma-Napoli, che abbiamo considerato all'inizio): perciò B appartiene ad un percorso di minima lunghezza fra A e C.

Dati due punti A, C la distanza AC si chiama anche **misura** (o **lunghezza**) del segmento AC: questa denominazione è naturale perché se spezziamo il segmento in due nel punto B, la misura di $[A, C]$ è uguale alla somma delle misure dei due segmenti, come dice la (2).

A5 (Assioma) *Fissata una semiretta $\mathcal{U}$ di origine O e fissato un numero reale positivo x esiste sulla semiretta un unico punto P tale che $\overline{OP} = x$.*

Dunque, con questo assioma *si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali positivi e i punti di una semiretta $\mathcal{U}$; possiamo completare la corrispondenza associando ai numeri reali negativi i punti della semiretta opposta aventi da O distanza uguale al valore assoluto del numero e facendo corrispondere allo zero il punto O.*

In questo modo, otteniamo una corrispondenza biunivoca fra i punti di una retta e i numeri reali

$$P \longleftrightarrow x$$

Il numero x si dice **coordinata** di P. Si dice che sulla retta $\mathcal{U}$ abbiamo stabilito un **sistema di coordinate** con **origine** O e avente come semiretta positiva la $\mathcal{U}$.

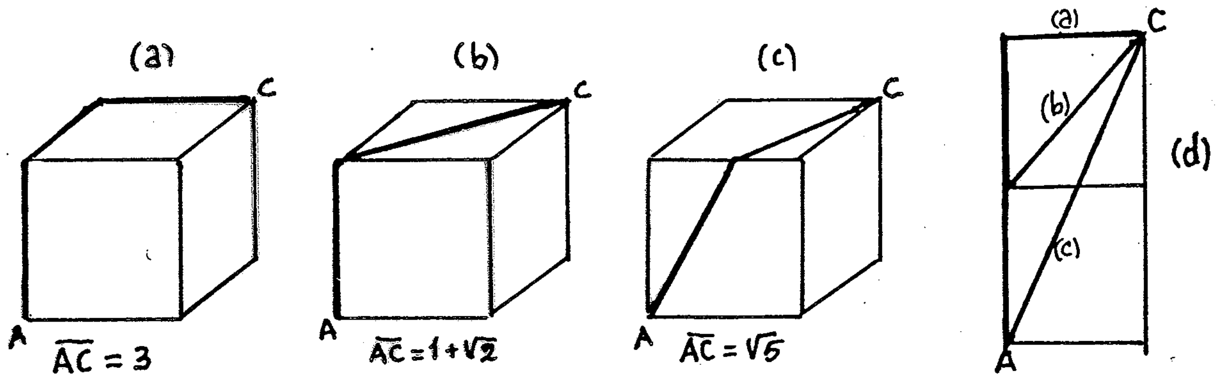
Questa corrispondenza biunivoca fra l'insieme **R** dei numeri reali e le rette è cosí familiare e cosí conforme all'intuizione, che i matematici, come segno (dalla riga e compasso, alla squadra o doppio decimetro)(°).

Se r è il raggio del lago, la distanza rettilinea tra A e B è $4r$. Invece:

$$d(A,B) = 2\sqrt{3}r + \frac{\pi}{3} r = \frac{6\sqrt{3} + \pi}{3} r \simeq 4,5r$$

il rapporto $\frac{4}{4,5} = 0,\overline{8}$ ci dice subito che non conviene bagnarsi i piedi.

3. Il cubo va pensato realizzato con una sagoma in cartoncino. I tipi possibili di cammini sono i tre descritti in figura, con le lunghezze ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, indicate, quando il lato è lungo 1;



nel 3° caso, quello delicato, basta sviluppare, come in (d), due facce adiacenti del cubo. E' allora possibile in (d), "leggere" con la disuguaglianza triangolare la relazione $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$.

Si contano i cammini osservando che

- quelli più lunghi sono $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24$ (da ogni vertice escono 3 spigoli..., si ragiona come in 12.4; i vertici sono 8; ogni cammino è contato due volte)
- quelli medi sono $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 24$ (da ogni vertice escono 3 spigoli..., oppure 3 diagonali di una faccia...)
- quelli più corti sono $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3 \cdot 2) = 24$ (da ogni vertice partono 2 cammini per ogni faccia, ed ogni vertice appartiene a 3 facce).

4. I minimi cammini vanno ora cercati tra quelli che congiungono due vertici opposti dello sviluppo di due facce adiacenti; di qui i casi in figura, con le lunghezze ℓ_1, ℓ_2 e i conti relativi.

(°) il disegno geometrico è un'attività che fa parte dell'"esplorazione a livello intuitivo" nel nostro processo induttivo-deduttivo. Nel cap.20 del Vol.2 le "costruzioni con riga e compasso" saranno inquadrate razionalmente nella